X

IMPLICACIONES DIDÁCTICAS DE LA PRESENCIA DE LOS LUGARES GEOMÉTRICOS EN LA CIENCIA, TECNOLOGÍA Y ARTE PARA LA FORMACIÓN PROFESIONAL DEL INGENIERO

Didactic implications of the presence of the places geometric in science, technology and art to engineer training

Universidad Peruana Unión

Raúl Acuña Casas

Licenciado en Matemáticas por la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Magíster en Educación por la Universidad Peruana Unión. Doctor en Administración por la Universidad Federico Villarreal. Doctor en Psicología por la Universidad Inca Garcilaso de la Vega. Exdecano de la Facultad de Educación y Ciencias Humanas de la Universidad Peruana Unión. Actualmente se desempeña como secretario de la Escuela de Posgrado de la Universidad Peruana Unión. Ha escrito numerosos artículos y es profesor visitante a nivel nacional e internacional.

Resumen

En este trabajo se aporta elementos para responder a la pregunta ¿qué implicaciones didácticas aportan la construcción y aplicación de los conceptos geométricos a lo largo de su desarrollo histórico? Se describe la presencia de los lugares geométricos en la ciencia, tecnología, arte y en la vida diaria con una mirada matemática, con el propósito de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el nivel superior. Se identifican las implicaciones didácticas que se derivan del estudio del desarrollo de los conceptos y procedimientos de los lugares geométricos. Se constata, en primer lugar, que estos conocimientos se van construyendo mediante la resolución de problemas que son entendidos como tales por quienes lo abordan. Otro aspecto, que se comprueba es que la geometría no solo va formando un cuerpo de conceptos, proposiciones y procedimientos específicos; también surgen un conjunto de estrategias cognitivas generales que actúan en tres ámbitos complementarios: resolución de problemas, descubrimiento de propiedades o invención de conceptos y evaluación de conjeturas. Igualmente, recurriendo al desarrollo histórico, se puede constatar que todo nuevo descubrimiento, en un área de la matemática, repercute enseguida en toda la matemática. Con la consideración de que las implicaciones didácticas propuestas, en el contexto de la formación del futuro ingeniero, los docentes los usen en la presentación de ideas en embrión, bien explicadas a partir de un problema con sentido para que se genere en el estudiante el conflicto cognitivo y el deseo de continuar con la investigación en la dirección que las necesidades le aconsejen.

Palabras clave: Lugar geométrico, concepto, procedimiento, estrategia cognitiva, razonamiento

Abstract

This paper provides elements to answer the question what educational implications provide the construction and application of geometric concepts throughout its historical development? The presence of loci in science, technology, art and daily life with the eyes of mathematics, in order to improve the teaching and learning of geometry at the top level is described. Didactic implications arising from the study of the development of concepts and procedures are identified loci. It finds, first, that these skills are built by solving problems that are perceived as such by those who approached. Another aspect that is checked, the geometry will not only forming a body of concepts, propositions and procedures; also arise a set of general cognitive strategies operating in three complementary areas: problem solving, discovery or invention properties of concepts and assessment guesswork. Similarly, using the historical development, it can be seen that every new discovery in an area of mathematics impact right away in all of mathematics. With consideration of the proposed didactic implications in the context of the formation of the future engineer, teachers to use in the presentation of ideas in embryo well explained from a problem with regard to student- generated conflict cognitive and desire to continue the research in the direction that needs advice.

Keywords: Places geometric , concept, procedure, cognitive strategy, reasoning

Introducción

En los ámbitos educativos se comenta y constata que la enseñanza de la geometría y del cálculo, en especial de las cónicas y de las superficies, en los primeros años de las carreras de Ingeniería, lleva asociado el fracaso académico. Es un hecho educativo complejo cuya explicación no es del todo satisfactoria, pues casi siempre se adopta un enfoque reduccionista, considerando solamente los factores motivacionales, aptitudinales, ambientales, psicológicos, sociológicos, biológicos o los pedagógicos. En efecto, se suele justificar con frases "hechas" como: la deficiente preparación de los estudiantes que se incorporan a estas asignaturas, la nula o escasa utilización de recursos informáticos en el aula, un clima de trabajo "tradicional", no innovador, que no motiva a los alumnos,… Sin embargo, consideramos que no son estos verdaderos argumentos didácticos capaces de explicar el fracaso académico en los primeros años universitarios, antes bien hay que buscar esa explicación en la propia esencia de la comprensión de los conceptos matemáticos implicados, que básicamente son: el de lugar geométrico, el de referencia afín canónica, el de sistema de coordenadas, de punto, recta y plano tanto en el plano como en el espacio, el concepto de cuádrica y el concepto de área entre otros. Notar el orden secuencial de construcción de los conceptos en el sentido de que un concepto, en la cadena sirve de andamiaje para la construcción del siguiente concepto, de ahí la importancia de la comprensión de los conceptos.

Es decir, la Didáctica de la Geometría y del Cálculo no hay que basarla en procesos psicológicos o pedagógicos –ya sabemos que desde esas perspectivas únicamente se dan argumentaciones parciales y, sobre todo, no matemáticas que no resuelven los problemas apuntados– Postulamos que únicamente desde una visión didáctica, basada en lo que Brousseau (1996) denomina "la problematización de las nociones matemáticas", se pueden dar aproximaciones y, por tanto, modelizaciones capaces de acercarnos a la explicación del fenómeno del fracaso académico. Por tanto, este artículo se basa en un análisis profundo de los aportes didácticos de los conceptos geométricos a lo largo de su desarrollo histórico.

Presencia de los lugares geométricos en la vida cotidiana

Aportaremos elementos para responder a la pregunta ¿para qué sirve la geometría? Para ello describiremos situaciones del mundo que nos rodea, de la vida misma, con una mirada matemática. Sin duda, es la circunferencia el lugar geométrico plano más abundante en la vida cotidiana, aunque en la mayoría de las veces no lo vemos como tal, normalmente lo miramos desde una cierta perspectiva y lo que vemos en realidad son elipses. Cuando nos disponemos a comer, la mirada a la mesa ya preparada es un conjunto de elipses; si además, para los entremeses abrimos latas de conservas, observamos que algunas tienen base elíptica y, si cortamos embutidos cilíndricos en secciones oblicuas, también las rebanadas obtenidas son elipses. Los marcos de algunos espejos y cuadros, algunos individuales, bandejas y fruteros, algunos tableros de mesa, etc. ilustran una gran variedad de elipses y óvalos.

Si salimos de compras a un centro comercial, descubrimos que los mensajes publicitarios exhibidos en algunas vidrieras y en los envases de muchos productos de limpieza, perfumería y joyería, los logotipos de marcas, las etiquetas, etc. Al entrar en un parque, ver tal vez un plantío elíptico o una fuente cuyos surtidores de agua describan parábolas, focos de luz pública rematada por globos esféricos. Cuando retornamos podemos contemplar las catenarias formadas por los cables que transportan la energía eléctrica, tendidas a lo largo de la autopista. Ya en nuestra casa, al encender la lámpara de mesa con pantalla cilíndrica o cónica produce en la pared un recinto iluminado con forma de hipérbola, el cual se transformará en elipse o en parábola, según modifiquemos la inclinación del eje.

Y ya después de cenar, si disponemos de un billar rectangular quizá deseemos ensayar alguna jugada y comprobar que con frecuencia, al colocar sobre el tapete dos bolas, es posible que una choque contra la otra después de rebotar en la banda, en base a la propiedad de que la bola rebota formando con la banda el mismo ángulo con el que llegó.

Presencia de los lugares en la ciencia y en la tecnología

En sistemas dinámicos, cuando se aborda un sistema de un cierto número de ecuaciones diferenciales, antes de recurrir al método numérico es posible hacerse una idea de por dónde irán las curvas solución o las trayectorias en el mapa de fases. Estas curvas pueden ser: rayos que salen del origen, parábolas, hipérbolas, elipses y circunferencias (figura 1).

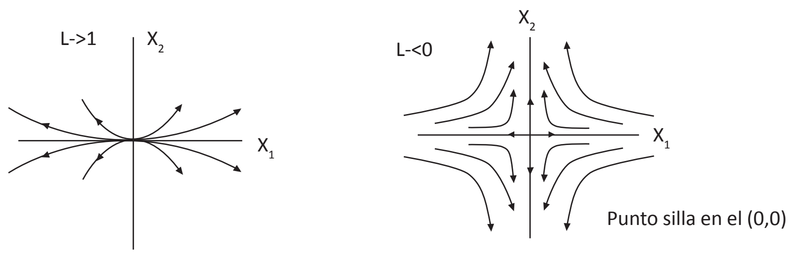

Figura 1. Plano de fases para el sistema de dimensión 2 con dos ecuaciones desacopladas

En la arquitectura de regadío, especialmente en la intensiva, es de vital importancia la función reguladora que cumplen las balsas de riego, gracias a las que se puede disponer de agua en los períodos del año en que la demanda evapotranspirativa de los cultivos es mayor que el aporte natural de este recurso. La vida útil que alcanza una balsa está, en gran medida, relacionada con la ausencia de aristas de intersección entre las distintas superficies que conforman el vaso interior de la misma, ya que de este modo se evitan las concentraciones de presiones ejercidas por el agua embalsada y, por tanto, disminuyen los esfuerzos que deben resistir los materiales de impermeabilización. Para el diseño geométrico considerando la capacidad, definición del contorno de la coronación, alzado de la balsa, inclinación de taludes y anchura de la coronación se recurre siempre a los lugares geométricos como superficies cónicas, superficies cilindroides y paraboloides hiperbólicos (Agüera y otros 1999).

La propiedad óptica de la parábola tiene varias aplicaciones. Un principio de la física dice que cuando un rayo de luz choca contra una superficie reflectora, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Se sigue que si la parábola gira en torno a su eje para formar una cubierta reflectora hueca, todos los rayos de luz que partan del foco se reflejarán, después de chocar con la cubierta, paralelos al eje. Esta propiedad de la parábola se usa en ciertos telescopios en que los rayos paralelos provenientes de una estrella lejana que entran son enfocados hacia un solo punto. Igualmente el sonido y las ondas electromagnéticas obedecen las mismas leyes de la reflexión de la luz, por lo que se usan micrófonos parabólicos para recoger y concentrar sonidos que provienen de una parte distante. Las antenas parabólicas utilizan la propiedad de reflexión de las ondas electromagnéticas para recibir o enviar señales a estaciones de radio, satélites de comunicación o galaxias remotas.

Galileo descubrió que la trayectoria de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo describe una parábola abierta hacia abajo.

La propiedad óptica de la elipse se emplea en el procedimiento médico, denominado litotricia por onda de choque para disolver en los riñones las piedras que sean muy grandes o irregulares, para salir de ellos. Las ondas de choque emitidas desde un transductor localizado en uno de los focos se reflejan desde un aparato elíptico hasta los cálculos renales localizados en el otro foco. (Smith y Milton 2001, p. 812).

La propiedad óptica de la hipérbola tiene varias aplicaciones. En el Sistema de navegación LORAN (figura 2), una estación radioemisora maestra y otra estación radioemisora secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en altamar. Puesto que un barco que monitoree las dos señales estará probablemente más cerca de una de las estaciones, habrá una diferencia entre recorridas por las dos señales, lo cual se registrará como una pequeña diferencia de tiempo entre las señales. En tanto la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia entre las dos distancias será también constante. Si el barco sigue la trayectoria correspondiente a una diferencia fija de tiempo, esta trayectoria será una hipérbola cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones. Si se usan dos pares de transmisores, el barco deberá quedar en la intersección de las dos hipérbolas correspondientes (Shenk 1997, p. 628).

Otra aplicación se da en la trayectoria de algunos cometas. Cuando el cometa que proviene del exterior del sistema solar y sea atraído por el sol, describirá una órbita hiperbólica, teniendo como un foco al sol y saldrá nuevamente del sistema solar. En acústica la hipérbola aparece como la frontera terrestre de la zona de audibilidad del ruido de un avión, en la siguiente situación: un avión vuela con movimiento rectilíneo a una altura constante con una velocidad constante. En un momento dado, la región de la superficie terrestre (que suponemos plana) en cuyos puntos se oye o se ha oído el ruido del avión es una circunferencia y cuando se acerca hacia el punto final donde se encuentra el avión, el radio móvil de la circunferencia disminuye y la frontera de la zona de audibilidad, es decir, la envolvente de estos círculos, tiene forma de hipérbola. (Río, p. 63)

Se pueden combinar las propiedades ópticas de la parábola y la hipérbola para construir un telescopio (figura 2).

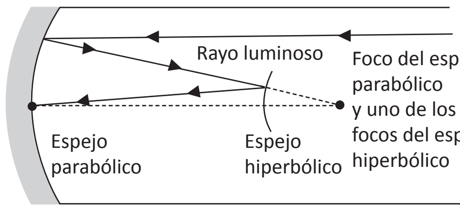

Figura 2. Diseño de un telescopio.

La presencia de los lugares geométricos en las artes y en las letras

La Matemática y la Arquitectura poseen una larga historia conjunta que se remonta a los orígenes del hombre y evoluciona con él. La Geometría ha aportado los métodos de representación y ha sido una fuente de formas y de metodología con las que se puede plantear numerosos problemas suscitados por la creación arquitectónica.

En el museo Inca de Cusco se observa una variedad de colecciones sobre objetos de bronce, que proceden de la época Preinca e Inca del Cusco, todos con diseños basados en las cónicas: tupus, tumis, cuchillos, coronas, cinceles, barretillas, anillos, pendientes de trenzas, brazaletes, plomadas, hachas, espejos, orejeras, agujas, pectorales, chipanas, armas, instrumentos musicales, instrumentos agrícolas y finalmente qeros (Barrera, 2003).

En estilos posteriores los arquitectos y los ingenieros no solo han utilizado las cónicas en el diseño de arcos o en las de algunos edificios (iglesias, anfiteatros, estadios, galerías…), sino sobre todo durante este siglo, se han empleado en numerosas construcciones las superficies de revolución que resultan al hacer girar las cónicas alrededor de sus ejes para la construcción de las cúpulas y otras formas tridimensionales.

La matemática también es fuente de inspiración para algunos literatos. Cuando Julio Cortázar en su obra *Toda esfera es un cubo* escribe "Apenas la coloco rotundamente sobre un plano inclinado, donde cualquier cubo se quedaría impertérrito, esta desgraciada saca todas las patitas y se tira al suelo como un relámpago…".

Atxaga (citado por Corbalan, 1995, p. 10) en su galardonado Obabakoak, dice: "Harris tenía una teoría muy curiosa acerca del cuento. Según él, un cuento no vendría a ser más que una simple operación de aritmética. Pero no una operación de cifras, claro, sino hecha a base de sumas y restas de elementos tales como amor, odio, esperanza, deseo, honor y otros por el estilo. La historia de Abraham e Isaac, por ejemplo, sería una suma de piedad más amor filial. La de Eva, por ejemplo, sería una resta limpia, amor de Dios menos amor del mundo. Según Harris, además, las sumas suelen dar a origen a cuentos con final feliz, los originados por restas, en cambio, suelen tener finales trágicos".

Implicaciones didácticas

Se expone algunas implicaciones didácticas que se derivan del estudio realizado sobre el desarrollo histórico de los conceptos y procedimientos que condujeron al descubrimiento de los lugares geométricos. Constatamos, en primer lugar, que estos conocimientos se van construyendo mediante la resolución de problemas que son entendidos como tales por quienes lo abordan. Estos problemas tienen orígenes diversos:

- Satisfacer o mejorar una necesidad práctica, como la de adaptar el péndulo a la regulación de los relojes llevó a Huygens a encontrar varias propiedades de la cicloide.

Huygens, en 1673, fue el primero en descubrir y darle aplicación a la siguiente propiedad: si desde dos puntos a altura distinta del cuenco se dejan caer al mismo tiempo dos canicas, resulta que llegan al punto más bajo del cuenco simultáneamente. Había estudiado a fondo los relojes de péndulo y observó que cuando un reloj tiene una variación en la amplitud de la oscilación del péndulo, entonces deja de contar el tiempo correctamente. Pero si la lenteja del péndulo se moviese no en una circunferencia, como en el péndulo normal, sino a lo largo de una cicloide, entonces aunque la amplitud de oscilación fuera mayor o menor, el período del péndulo seguiría siendo el mismo.

- Buscar la explicación de un fenómeno físico o social, como la trayectoria de los planetas que condujo a Apolonio a crear la teoría de los epiciclos, perfeccionada luego por Ptolomeo. Según esta teoría, el planeta describe con movimiento uniforme un círculo denominado epiciclo, cuyo centro a su vez se desplaza en un círculo mayor, concéntrico con la tierra, llamado deferente.

A Kepler condujo encontrar una presencia de la elipse en las órbitas de los planetas. Estudiando los movimientos de Marte, al aplicar el modelo de Copérnico de órbitas circulares alrededor del sol, vio que los cálculos discrepaban ligeramente de la posición real del planeta en el firmamento. Así que intentó ajustar la órbita a otras curvas y finalmente encontró que la elipse se ajustaba maravillosamente a ella. Así encontró su primera ley del movimiento de los planetas. Si en lugar de Marte hubiera decidido estudiar a Venus, cuya órbita es prácticamente circular, posiblemente nunca hubiera descubierto sus leyes del movimiento.

- Responder a una inquietud cultural o lúdica, como el problema de Delos cuya resolución condujo a Menecmo al descubrimiento de las secciones cónicas.

Pericles gobernador de Atenas por el año 429 a.C., muere víctima de la peste que atacaba muy severamente la ciudad. A raíz de este suceso, algunos de los habitantes deciden ir a la ciudad de Delos para hacer consultas al oráculo de Apolo y saber cómo poder detener la epidemia. La respuesta a la consulta del Oráculo es que deben elaborar un nuevo altar en forma de cubo cuyo volumen duplique al del altar que ya existe. La pandemia se disipó con el tiempo, pero el problema matemático planteado permaneció.

El primero en abordar el problema sin éxito fue el griego Hipócrates de Chios. Luego Menecmo, descubrió que las secciones planas de un cono servían para resolver la duplicación del cubo. El asunto era interpolar dos medias proporcionales entre dos cantidades a y b, a como la arista del cubo inicial y $b = 2a$, como apreció ya Hipócrates. Es una solución aproximada, prescindiendo de la condición restrictiva de emplear solo la regla y el compás. En la misma Grecia, usando la composición de movimientos uniformes se definieron otras curvas planas, como la cuadratriz, la concoide, la cisoide, destinadas a resolver problemas particulares, como la cuadratura del círculo o la trisección del ángulo.

- Mejorar conceptos o procedimientos que ya pertenecen al dominio de la propia matemática, como el trazado de tangentes o el cálculo de áreas y longitudes.

En primer lugar, resaltar la producción matemática de Arquímedes relacionado a la solución de problemas sobre cuadraturas, curvaturas y cálculo de tangentes por lo que se le considera un precursor del Cálculo Diferencial e Integral. En el aspecto metodológico propone el método Mecánico–Geométrico, el método de Exhaución y el método de Tangentes.

Determina que el área de un segmento parabólico es 4/3 del área del triángulo inscrito de igual base y altura. Además, demuestra también que el área de una elipse completa de semiejes a y b, es πab, basándose en la propiedad de que las áreas de las elipses están en la misma proporción que las de los rectángulos construidos sobre sus ejes. Finalmente, descubre la espiral que hoy lleva su nombre para resolver el problema de la trisección del ángulo. También llega a demostrar, entre otras cosas, que el área del primer ciclo de una espiral es igual a una tercera parte del área del círculo circunscrito. Es precisamente en este trabajo donde desarrolla su "Método de Tangentes".

Apolonio también incursiona en el estudio de los diámetros y su relación con el trazado de tangentes. En efecto, dado un diámetro AB, Apolonio demuestra que los puntos medios de las cuerdas paralelas a él determinan otro diámetro CD (diámetro conjugado); además las rectas paralelas a AB que pasa por C y D son tangentes a la cónica y determinan, junto con las tangentes en A y B, un paralelogramo equivalente al rectángulo construido sobre los ejes. Apolonio propone todavía un nuevo método basado en las propiedades de la división armónica de un segmento para el trazado de tangentes a una elipse, desde un punto exterior cualesquiera.

Algunos problemas se reformulan con el paso del tiempo: se añaden o quitan condiciones; se aumenta la dimensión del espacio; se generaliza el contexto de situaciones físicas concretas a abstractas, etc. De esta manera, surgen constantemente nuevos problemas cuyas situaciones llevan nuevos conceptos y procedimientos. Por ejemplo, la supresión de la condición de usar solo la regla y el compás en la solución de los tres problemas clásicos facilitó el descubrimiento de nuevos lugares geométricos (cónicas, trisectriz, cuadratriz, concoide, como ejemplos); la generalización del problema de las tres o cuatro rectas le permitió a Descartes inventar las curvas algebraicas y ampliar el concepto de lugar geométrico. En el proceso de resolución intervienen con frecuencia ideas de otras ciencias (cf. El trazado cinemático de la tangente según Roberval y Torricelli) y se emplean todos los métodos disponibles: sintéticos, analíticos, infinitesimales, mecánicos…, aunque en cada problema un tratamiento puede ser más eficaz que otro. Abordar la solución con un solo método puede conducir a la esterilidad.

Los conceptos y, sobre todo, los procedimientos se van construyendo lentamente a partir de tanteos, exploraciones, aproximaciones, formulación de conjeturas, etc. Muchas veces, en una primera instancia se producen errores que se van corrigiendo cuando se formalizan posteriormente. En el recorrido histórico hemos visto, por ejemplo, que Galileo confundió la catenaria con una parábola pero conjeturó con buen tino que el área de un arco de cicloide era cuatro veces la del círculo generador, empleando un método experimental. De igual manera, Kepler aproximó la longitud de una elipse mediante la fórmula $\pi(a+b)$ y hallar su verdadero valor llevaría dos siglos después a la invención de las integrales y funciones elípticas.

Los conceptos, las estructuras conceptuales y los procedimientos matemáticos, relacionándose unos con otros, se organizan y tienden a engendrar otros más generales, es decir, más abstractos y/o con mayor ámbito de aplicabilidad. Por ejemplo, hemos visto cómo las cónicas fueron, en primer lugar, secciones de un cono, luego lugares geométricos planos caracterizados por las propiedades focales o foco-directriz y, finalmente, una ecuación algebraica de segundo grado. El concepto de lugar geométrico se amplió hasta incluir en él las ecuaciones algebraicas, en general, las de cualquier curva (catenarias, cicloides, epicicloides, etc.). Por tanto, se trata de conocimientos en continua evolución, donde algunos pueden quedar obsoletos y otros se revisan para ampliar su significado o para relegarlos a un segundo plano, como ha ocurrido con ciertas curvas griegas: trisectriz, concoide de Nicomedes, etc.

De todo este análisis se deduce que el camino para aprender los conceptos y procedimientos matemáticos se ha de partir de un problema con sentido para los estudiantes (Pappus no abordó el problema de las ocho rectas porque no tenía sentido para él el producto de cuatro segmentos). Los alumnos deben encontrar sentido significado a los problemas para que los asuman como propios, para que se genere en ellos el conflicto cognitivo, un cierto deseo de saber, y pueda iniciarse el proceso de aprendizaje.

Además, el método de enseñanza debe permitir el uso del razonamiento inductivo: explorar, tantear, buscar ejemplos y contraejemplos, analizar casos particulares, formular conjeturas,... El trabajo práctico manipulativo con modelos materiales y otros recursos didácticos puede ser una actividad instructiva muy importante para promover este tipo de razonamiento. Luego debe venir una etapa de sistematización y formalización (hasta donde lo permita la capacidad de los estudiantes) en la que predomine ya el razonamiento deductivo. La formulación rigurosa es la última fase en la construcción del conocimiento matemático.

Otro aspecto que hemos comprobado en el análisis de la evolución histórica, que las matemáticas no solo son conceptos, proposiciones y procedimientos específicos; también surgieron un conjunto de estrategias cognitivas generales que actúan en tres ámbitos distintos pero complementarios: resolución de problemas, descubrimiento de propiedades o invención de conceptos, y evaluación de conjeturas. Muchas de estas estrategias sirven para los tres ámbitos y otros tienen un uso más restringido. A continuación describiremos las que hemos encontrado:

- **Análisis:** Es una estrategia demostrativa que se utiliza para evaluar conjeturas o proposiciones. Para una proposición, consiste en buscar una cadena de proposiciones equivalentes a p hasta llegar a una proposición q ya conocida, en cuyo caso p es verdadera, o a una contradicción, en cuyo caso p es falsa.
- **Síntesis:** Es otra estrategia demostrativa que consiste en partir de varias proposiciones ya conocidas y, mediante argumentos lógicos o deductivos, llegar a la proposición o conjetura que se desea probar. La obra de Apolonio sobre las cónicas es un modelo paradigmático del uso de esta estrategia.
- **Construcción de dibujos y modelos materiales:** Es una estrategia polivalente e imprescindible en geometría y otras ciencias: láminas recortadas con formas geométricas para estimar áreas (como lo hizo Galileo, discos articulados o varillas para el trazado de curvas (como el elipsógrafo de Arquímedes), conos de cartón para analizar sus secciones, etc.
- **Búsqueda de regularidades, pautas o analogías:** Es una estrategia muy útil en el descubrimiento de propiedades e invención de conceptos. Por ejemplo, las definiciones unificadas de las cónicas: como lugar geométrico caracterizado por la razón de la distancia foco-directriz, como ecuación algebraica, como proyección de un círculo y el criterio unificado de todas ellas por el denominado principio de continuidad de Kepler.
- **Generalización:** Esta estrategia también se puede aplicar a conceptos, a procedimientos y a problemas; Descartes, por ejemplo, generaliza el problema de Pappus y encuentra las curvas algebraicas de grado mayor que dos.
- **Análisis de posibilidades:** Esta estrategia permite, por ejemplo, encontrar todos los tipos de curvas que se obtienen al seccionar un cono.

- **Clasificación:** Está ligada a la estrategia anterior y a la búsqueda de analogías. Los griegos clasificaron los lugares geométricos según su constructibilidad, Descartes la hizo por el grado de la ecuación que los representa; en cualquier caso, clasificar conduce, en muchas ocasiones, a la invención de nuevos conceptos y de nuevos procedimientos.
- **Estimación:** Se emplea esta estrategia como una primera aproximación (a veces suficiente) a la solución de algún problema; hemos visto ejemplos en la determinación del área de un círculo, de una cicloide, longitud de la elipse, etc.
- **Variación de condiciones:** Es una técnica que puede servir par resolver problemas, como ocurrió con los tres problemas clásicos al ir relajando la condición de usar solo la regla y el compás; pero también puede conducir a la formulación de conjeturas si se varía la hipótesis de un teorema o, incluso, se cambia por la tesis: la ecuación de cualquier cónica es de segundo grado, ¿toda ecuación de segundo grado representa a una cónica?

Todo programa de enseñanza de Matemática, en particular de Geometría analítica, debe incluir dos aspectos: una fuerte ejercitación y un rigor científico que apoye a la primera. Ambos aspectos deben estar entrelazados, ya que una educación matemática solamente práctica, a base de recetas con aplicaciones de fórmulas y uso de tablas y computadoras, mecaniza al alumno con la posibilidad de coartar su capacidad creadora. En contraparte, una educación basada en abstracciones y sutilezas lógicas puede apartar al alumno de toda realidad, incapacitándolo para enfrentarse con las exigencias de sus quehaceres profesionales. Una clase de Matemática productiva debe encontrar el equilibrio entre la capacidad razonadora abstracta y la habilidad operativa, considerando su contextualización con la realidad a través de su presencia en dominios tan variados como la vida cotidiana, la técnica, las ciencias experimentales y las artes plásticas. Este nexo con la realidad sería muy importante por las siguientes razones.

La realidad es una fuente de múltiples problemas que pueden servir tanto para construir conceptos y procedimientos como para aplicarlos en contextos muy variados. Además, el uso de diferentes contextos no solo contribuye a la funcionalidad del aprendizaje, sino que constituye uno de los elementos motivadores del mismo. Y, en el tema que nos ocupa, tenemos ejemplos muy valiosos de esta multiplicidad de presencias de un mismo objeto geométrico en contextos diferentes; por ejemplo, se puede encontrar una elipse en la sombra de una señal circular de tráfico, en la órbita de los planetas y en la ventana de un edificio barroco. Apreciar la presencia de un mismo concepto o procedimiento matemático en contextos reales distintos ayuda a desarrollar el "ojo matemático", es decir, ese conjunto de capacidades y estrategias cognitivas que forman parte del quehacer matemático: observación, medición, búsqueda de relaciones, clasificación, formulación y evaluación de conjeturas, comunicación de resultados, generalización, ampliación de problemas, etc.

1. Analizar situaciones reales implica aprender a elaborar modelos matemáticos que la expliquen (si ello es posible) y a transferir los conocimientos adquiridos a nuevas situaciones. Así, por ejemplo, construida la propiedad angular de la tangente a una parábola para explicar la forma de una antena parabólica, se puede transferir esta estructura conceptual para explicar la forma de los reflectores de los faros o la construcción de una parábola como envolvente mediante plegado de papel vegetal.
2. El uso de la realidad en el aula no solo ayuda a comprender en profundidad el significado de los conceptos y procedimientos matemáticos, sino que contribuye a generar actitudes que llevan al alumno a reconocer la utilidad de las matemáticas, es decir, su valor instrumental. Apreciarán su íntima relación con la vida cotidiana, con el arte, con la cultura, con otras ciencias y, al mismo tiempo, valorarán su carácter abstracto, general y universalista.
3. Un elemento didáctico muy importante en el quehacer del estudio de la matemática es la visualización. Las ideas, conceptos y métodos de la matemática presentan una gran riqueza de los contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación de ellos para la resolución de los problemas del campo.

Nuestra percepción es muy prioritariamente visual y así no es de extrañar en absoluto que el apoyo continuo en lo visual esté tan presente en las tareas de matematización, no solo en aquellas que, como la geometría, se refieren más directamente a la exploración específica de aspectos del espacio, sino también en otras, como el análisis, que nacieron para explorar los cambios de los objetos materiales en sí mismos y en sus aspectos espaciales.

La visualización aparece así como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático.

Presentaremos dos ejemplos de visualización de la escuela pitagórica de entre una multitud de teoremas interesantes (figura 3).

Figura 3. Visualización de sumatorias

Para los griegos, la visualización era totalmente connatural a la matemática. En Platón el papel específico de la imagen en la construcción matemática se resalta fuertemente y se hace más explícito. La imagen evoca la idea, como la sombra evoca la realidad. El círculo pintado no es la realidad del círculo. La realidad del círculo es la idea, pero la imagen juega un papel bien importante de evocación, es decir, de recuerdo de la idea. La diánoia es lo propio del conocimiento matemático. El matemático se acerca a lo inteligible a través de la referencia a lo sensible. Siguiendo este razonamiento discursivo, Arquímedes utilizó su método analógico como herramienta muy fundamental para sus descubrimientos matemáticos.

Igualmente, el cálculo del siglo XVII nace con un componente visual muy fuerte y así se mantiene en su desarrollo a lo largo de los siglos siguientes, en interacción constante con problemas geométricos y físicos. Las siguientes palabras de Silvestre pueden resumir y representar el sentir de algunos de los grandes clásicos de la matemática: “Lagrange ha expresado con énfasis su creencia en la importancia para el matemático de la facultad de observación. Gauss ha llamado a la matemática una ciencia del ojo” (De Guzmán, 1996, p. 29).

Con respecto a la visualización se debe insistir en la prolijidad y exactitud de los gráficos y modificar las conductas equivocadas en el trazado de gráficas que arrastran desde la secundaria. Por ejemplo, hay alumnos universitarios que al trazar una parábola a pulso, hacen una u muy cerrada en sus extremos que al prolongarlos se interceptan. Con estas deficiencias un futuro ingeniero no puede volcar o extraer correctamente información científica del gráfico.

Otro aspecto algo descuidado en la enseñanza de la matemática es no considerar la relación interdisciplinar entre las distintas áreas que la componen, la particionan en estancos diferentes sin ninguna relación. Hemos visto que la invención del plano cartesiano dio origen a la Geometría Analítica permitiendo la unión de la Geometría con el Álgebra. La opción (racional) de la divisibilidad infinita de los sólidos geométricos en sus partes elementales, ya sea segmentos de recta o secciones circulares, originó el cálculo infinitesimal, y este a su vez alimentó a la creación de la Geometría Diferencial que no es otra cosa que la unión de la Geometría con el Álgebra y el Análisis; como se puede ver, todo nuevo descubrimiento en un área de la matemática, repercute enseguida en toda la matemática.

Así como hay un encadenamiento fuerte entre las diferentes áreas que estructuran el edificio matemático y entre las diferentes disciplinas del conocimiento, también la metodología de su enseñanza debe mostrar esta interdependencia, ya sea por ser su referente de estudio o por las necesidades aplicativas que demanda la carrera, esto permitirá al futuro ingeniero no solo la formación académica correcta sino además afianzar sus posibilidades para seguir aprendiendo nuevos conocimientos por sí solo. Al respecto, Río (1996, p. 52) manifiesta que es muy conveniente que las estrategias (análisis; síntesis; construcción de dibujos y modelos materiales; búsqueda de regularidades, pautas o analogías; generalización; análisis de posibilidades; clasificación; estimación y variación de condiciones) y otras estrategias cognitivas, comunes a muchas otras ciencias, deben ser enseñadas como un contenido de aprendizaje en las mismas condiciones que los conceptos y los procedimientos más específicos.

En la enseñanza se debe presentar menos conocimientos terminados, pero más ideas en embrión, bien explicadas para que continúen con la investigación en la dirección que las necesidades le aconsejen.

Todavía hoy por hoy, la enseñanza es una mera transferencia de contenidos, y no una transmisión de los procesos de pensamiento. Es oportuno precisar que en la ciencia matemática el método de estructura predomina sobre el contenido.

También hemos constatado que las matemáticas fueron construidas (están siendo construidas) por personas de carne y hueso, inmersas en un mundo con unas características bien concretas que condicionaron enormemente su trabajo; y, junto con algunas actitudes negativas, podemos reconocer en ellas muchas actitudes dignas de ser enseñadas a los estudiantes si queremos aspirar a una formación integral de su personalidad. Hay en estas personas curiosidad e interés por investigar y resolver problemas que la mayoría de las veces necesitan concentración y tenacidad (recordemos el esfuerzo de Kepler para caracterizar el movimiento de los planetas). Además, se observa en muchos casos una actitud 'lúdica' y desinteresada para enfrentarse con problemas aparentemente con poco contenido científico o con escaso interés instrumental o práctico (como el caso de los matemáticos griegos frente a los tres problemas clásicos). Al mismo tiempo, mantienen una autonomía y una independencia intelectual exentas de prejuicios religiosos, políticos o culturales (paradigmático es el caso de Galileo). Los resultados obtenidos son comunicados a los demás para ser juzgados y revisados mediante cartas, discusiones, artículos en revistas, libros, etc. Esto genera satisfacciones personales para el autor y también, en algún caso, recelo por el reconocimiento social, pero, sobre todo, fomenta la actitud crítica, favorece la flexibilidad para admitir las formulaciones de los demás y para cambiar si es preciso las propias y, al mismo tiempo, permite a otros construir nuevos conocimientos (Fermat hizo muchos de sus descubrimientos cuando revisaba obras clásicas; Stirling mejoró la clasificación de las cúbicas realizada por Newton; Jacques Bernoulli detectó un error en el razonamiento de su hermano Jean para encontrar la curva braquistocrona, etc.). Estas y otras actitudes son muy valiosas en un mundo tan cambiante y contradictorio como el que nos ha tocado vivir. Parece necesario, por lo tanto, fomentar en los estudiantes todo este cúmulo de actitudes y cambiar las contrarias porque desde este el sustrato afectivo se enfrentan al aprendizaje de los conceptos, de los procedimientos específicos y de las estrategias generales, condicionándolo positiva o negativamente.

El estudio de las curvas atañe a todas las especialidades de la ingeniería, así el conocimiento de la parábola tiene sus aplicaciones en numerosas cuestiones físicas: mecánica, resistencia de materiales, óptica; la elipse en el estudio de los planetas, problemas de estabilidad, tensiones en estados elásticos planos (la elipse de lamé); la hipérbola en el comportamiento de los gases o problemas referentes a flujo estacionario de electricidad o de calor, con sus representaciones en hipérbolas homofocales, todo esto entre algunas de las múltiples aplicaciones de las cónicas. También hay que tener en cuenta el estudio exhaustivo en curvas de propiedades mecánicas notables, como la cicloide, que se destaca en perfiles de obras hidráulicas, o trazados de engranajes dentados; la lemniscata de Bernoulli cuyas propiedades se aplican con frecuencia en las máquinas para la transformación del movimiento circular en rectilíneo y viceversa, o espirales como la de Arquímedes utilizadas en curvas de flujo, como por ejemplo en flujos de aire de un ventilador centrífugo.

En cuanto al valor y fines de la enseñanza de la matemática pueden destacarse tres aspectos:

1. La matemática posee un gran valor formativo pues disciplina a la mente para el razonamiento cuantitativo y cualitativo. El primer tipo de razonamiento ocurre cuando se estudia proposiciones y relaciones numéricas, aspectos característicos de toda teoría matemática y toda teoría físico-natural. El segundo tipo se da cuando se conocen ciertas premisas y de estas se quieren inferir nuevas proposiciones, esta práctica intelectual capacita al futuro profesional en la aptitud de analizar y deducir, de fijar con precisión la hipótesis o hechos conocidos, y la tesis o conclusiones, pasando de una a la otra por un camino racional seguro, mediante la utilización de las reglas de la lógica. Al respecto Toranzos (1963, p. 57) concluye que la enseñanza de la Matemática es una preparación disciplinaria de la mente para el estudio de las demás ciencias, el conocimiento de sus métodos de razonamiento es un medio formativo indispensable para el estudio de las disciplinas físico-naturales y para la técnica.

2. La matemática constituye una excelente herramienta para describir e interpretar los fenómenos de las ciencias naturales. La física, la astronomía, la química, etc., gracias a la matemática, se han estructurado y han llegado a adquirir la perfección admirable con que hoy las conocemos. La matemática empieza a actuar desde la visualización hasta la interpretación del fenómeno. En efecto, para su representación visual, la matemática ofrece un extenso campo de posibilidades para elegir el modelo geométrico, y para su análisis el uso del cálculo diferencial e integral, las ecuaciones diferenciales, la geometría diferencial, la topología, etc., obteniéndose así una estructura típicamente matemática. Cosa análoga sucede con la tecnología, en esta era de la energía atómica, de la radiotelescopía, etc., todos estos inventos tienen su soporte teorético en la matemática. Así, la matemática y sus aplicaciones representan, pues, uno de los medios que más claramente muestran el triunfo de la inteligencia humana frente a la naturaleza.

3. La matemática tiene un valor utilitario en la vida diaria del hombre moderno por sus numerosas aplicaciones en los negocios (comercio, publicidad), en los juegos informáticos o películas de ciencia ficción, en la albañilería, en la identificación de las tarjetas de ahorro y crédito, en los medios de comunicación (encuestas), en las recetas de cocina, en la forma como nos desplazamos a nuestro centro de trabajo (trayectoria), hasta en nuestra conversación debido a que toda persona, aunque no haya ingresado al sistema educativo maneja al menos un corpus vocabular matemático básico. Es cierto que hay matemática en muchos aspectos de la vida a condición, eso sí, de que se quiera ver, de que se agudice nuestra percepción para captarlas. Y cuando se consigue verlas nos proporcionan una realidad mucho más rica, con más tonalidades. Hasta en el aspecto moral, tan alejada aparentemente pero que contribuye a la formación de hábitos de exactitud, de rigor, de seguridad, y el respeto al igual que de la verdad científica por la verdad moral, esta última como norma suprema en la conducta.

Raúl Acuña Casas
Universidad Peruana Unión
email: raul@upeu.edu.pe

Recibido: 17 de octubre de 2013
Aceptado: 30 de enero de 2014

Referencias

Acuña, R. (2004). Movimiento de figuras en las demostraciones geométricas: un estudio sobre su efecto en el rendimiento académico. *Tesis doctoral no publicada,* Universidad Inca Garcilaso de la Vega. Lima-Perú

Agüera F., Aguilar, J., y Carbajal, F. (1999). *Introducción a la geometría descriptiva.* Almería-España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.

Artigue, M, et al. (1999). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Avellaneda, J. (1978). *Lecturas de teoría de la ciencia.* Lima: Editorial Jurídica S.A.

Babini, J. (1980). Historia de las ideas modernas en matemática. Buenos Aires: Secretaría General de la OEA. Programa regional de desarrollo científico y tecnológico. Serie de matemáticas – *monografía no. 4.*

Beltrán, E. (1987). *Autocontrol y rendimiento académico.* En la I Jornada de Investigación Científica. (s.p.). Lima, Oficina coordinadora de investigación científica de la Universidad de Lima.

Barreda, L. (2003). Bronces de Qoricancha. Recuperado el día 16 de agosto de 2013, de http://www.luisbarredamurillo.galeon.com.

Boyer, C. (1985). *Historia de la matemática.* Madrid: Editorial Alianza.

Capella, J. (1999). Aprendizaje y constructivismo. Lima: Ediciones Massey and Vannier.

Corbalán, F. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana.* Barcelona: Editorial Graó, de Serveis Pedagogics.

Collete, J. (1985) *Historia de las matemáticas.* Madrid: Siglo XXI.

De Guzmán, M. (1996). El rincón de la pizarra. *Ensayos de visualización en análisis matemáticos.* Madrid: Ediciones Pirámide.

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. de C.V.

Huamán, J. (2002). La eficacia docente. *Revista Universidad & Negocios,* Año V, edición N.° 06,33.

Orton, A. (1996). *Didáctica de las matemáticas.* Madrid: Ediciones Morata, S.L.

Río, J. (1996). *Lugares geométricos.* Cónicas. Madrid: Editorial Síntesis S.A.

Santaló, L. (1989). Geometría y física. *Revista Física, ciencia y microcomputación.* http: //303. ubik. to/geoff. html, p. 1-16.

Shenk, A. (1997). *Cálculo y geometría analítica.* México: Editorial Trillas.

Smith, T., y Minton, B. (2002). *Cálculo Tm 1.* Colombia: Editorial McGraw-Hill.

Toranzos, I. (1963). Enseñanza de la matemática. Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

Vitale, B. (1994). *La integración de la informática en el aula.* Madrid: Visor Distribuciones, S.A.